

Nombre y Apellido: [Redacted]
 Nro. Hojas: 1

Nota:

1. Las siguientes son dos representaciones en variables de estado de un sistema de segundo orden

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} z(t) \end{cases} \quad \text{Si } x = Tz \text{ y la matriz } A \text{ tiene}$$

autovalores $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -5$ con sus correspondientes autovectores $v_1 = [-3 \ 1]^T$ y $v_2 = [1 \ 0]^T$.

- Halle las matrices A , b y C .
- Halle el equivalente discreto del sistema expresado en las variables z para entrada constante en cada intervalo de muestreo, si $T = 0.1$ seg.

2. Para las ecuaciones de estado de un sistema no lineal: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(x_1 - a) \\ x_2(x_2 - b) \end{bmatrix}$

- Halle todos los puntos de equilibrio y linealice las ecuaciones de estado en torno a cada punto hallado.
- Clasifique cada punto de equilibrio y esboce las trayectorias de estado posibles en el plano x_1-x_2 .
- Analice si las conclusiones obtenidas pueden extenderse al sistema no lineal.

3. Un sistema se modela mediante la siguiente ecuación de estado: $\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t)$

donde $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, $\alpha \neq \beta$.

- Halle la matriz de transición de estados $\Phi = e^{At}$.
- Suponiendo $\alpha \neq \beta$, ¿qué condición debería imponer a los valores "c" ó "d" para que el sistema sea controlable en tiempo continuo?

- Comente las ventajas y desventajas que Usted aprecia que tiene la realimentación de estados en la asignación de polos en comparación con el método clásico del lugar de las raíces.
- ¿Por qué es importante calcular los márgenes de fase y ganancia en un sistema regulador para el cual ya se han preseleccionado los polos de lazo cerrado mediante una realimentación de estados?
- ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de un controlador del tipo "dead-beat"?
- Si tuviera que relocalizar los polos de un sistema de orden 15 y la única restricción de diseño fuera el tiempo de establecimiento, explique una alternativa de diseño para este caso.

5. El sistema de tercer orden representado en variables de estado por $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$ se realimenta

con una señal de control proporcional al vector de estados $u(t) = -[3 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ resultando en la matriz

$$A - bL = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Si } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

- Determine los autovalores del sistema antes y después de incluir la realimentación.
- Justifique si es posible modificar la ganancia L de modo de asignarle al sistema realimentado autovalores bajo la condición $\operatorname{Re}(\lambda_i) < -2$. (No intente hallar L).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$x = Tz \rightarrow T\dot{z} = ATz + bu(t)$$

$$\dot{z} = \underbrace{T^{-1}AT}_{J} z + \underbrace{T^{-1}b}_{\tilde{b}} u(t)$$

$$T^{-1}AT = J \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = J \rightarrow A = TJT^{-1}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = A \quad \checkmark$$

$$T^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b = T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$y(t) = Cx(t) = \underbrace{CT}_{[1 \ 0]} z$$

$$[1 \ 0] = CT \rightarrow C = [1 \ 0] T^{-1}$$

$$= [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C \quad \checkmark$$

$$b = 0,1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} z(k+1) = \phi z(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = [1 \ 0] z(k) \end{cases}$$

$$\phi = e^{\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} T} = \begin{bmatrix} e^{-5T} & 0 \\ 0 & e^{-3T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-5 \cdot 0,1} & 0 \\ 0 & e^{-3 \cdot 0,1} \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 0,606 & 0 \\ 0 & 0,741 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$r = \int_0^T e^{\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tau} b \, d\tau = \int_0^T e^{\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tau} d\tau \, b$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \left[e^{\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tau} \right]_0^T b$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \left[e^{\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} T} - I \right] b =$$

$$= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0,606 & 0 \\ 0 & 0,741 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] b =$$

$$= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,294 & 0 \\ 0 & -0,259 \end{bmatrix} b =$$

$$= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 1,182 & 0 \\ 0 & 1,295 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0,0788 & 0 \\ 0 & 0,0863 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} -0,0788 \\ 0,0863 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

②

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1 - a) = x_1^2 - a x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2(x_2 - b) = x_2^2 - b x_2$$

③ puntos de equilibrio

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1(x_1 - a) = 0 \\ x_2(x_2 - b) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow x_1 = 0 \\ \leftarrow x_1 = a \\ \leftarrow x_2 = 0 \\ \leftarrow x_2 = b \end{matrix}$$

$$p_1(0, 0)$$

$$p_2(0, b)$$

$$p_3(0, 0)$$

$$p_4(a, b)$$

$$p_1) \quad \dot{x}_1 = \frac{d}{dx_1}(x_1^2 - a x_1) \Big|_{x_1=0} x_1 = \frac{d}{dx_1}(2x_1 - a) \Big|_{x_1=0} x_1 = -a x_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d}{dx_2}(x_2^2 - b x_2) \Big|_{x_2=0} x_2 = \frac{d}{dx_2}(2x_2 - b) \Big|_{x_2=0} x_2 = -b x_2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

p2)

$$\dot{x}_1 = -a x_1$$

$$\dot{x}_2 = (2b - b) x_2 = b x_2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

p3)

$$\dot{x}_1 = \frac{d}{dx_1}(x_1^2 - a x_1) \Big|_{x_1=a} x_1 = \frac{d}{dx_1}(2x_1 - a) \Big|_{x_1=a} x_1 = a x_1$$

$$\dot{x}_2 = -b x_2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

P₁)

$$x_1 = \frac{1}{a} \left(\dots \right) \Big|_{x_1=0}$$

$$= 0 \cdot x_1$$

$$x_2 = \frac{1}{b} \left(\dots \right) \Big|_{x_1=0}$$

$$= b \cdot x_1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

✓

$$a > 0 \text{ y } b > 0$$

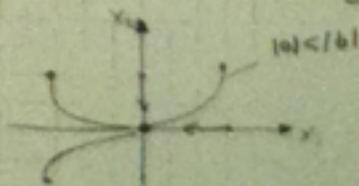
⑥

$$P_1(0,0)$$

$$\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = e^{-at} x_1(0)$$

$$x_2(t) = e^{-bt} x_2(0)$$



Nodo estable ✓

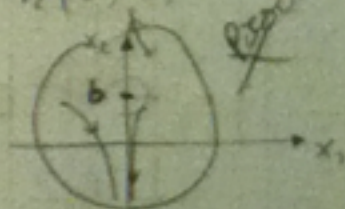
$$P_2(a,b)$$

~~Resoluto~~

$$\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = e^{-at} x_1(0)$$

$$x_2(t) = e^{bt} x_2(0)$$



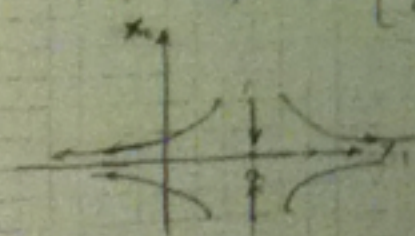
Silla ✓

$$P_3(a,0)$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = e^{at} x_1(0)$$

$$x_2(t) = e^{-bt} x_2(0)$$



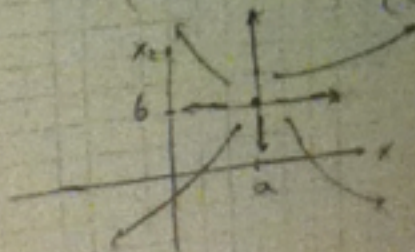
Silla ✓

$$P_4(a,b)$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

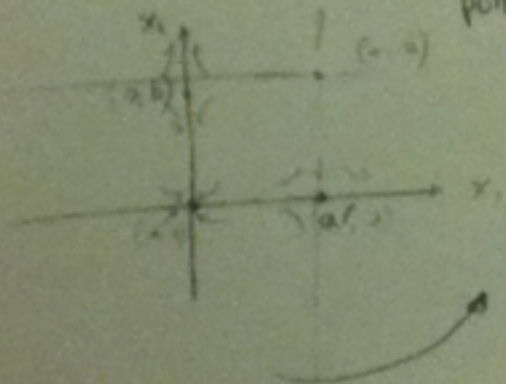
$$x_1(t) = e^{at} x_1(0)$$

$$x_2(t) = e^{bt} x_2(0)$$



Nodo inestable ✓

- © Las conclusiones no pueden extenderse al sistema no lineal porque al linealizar solo se trabaja en un entorno de los puntos de equilibrio, al salir de ese entorno donde la linealización es válida, caemos en el campo de acción de otro punto de equilibrio que hace que el sistema se desarrolle en otro sentido. \rightarrow Si localmente por ser puntos hiperbólicos -



Hay una región entre los puntos de equilibrio en la que el sistema vuelve a $(0,0)$, por fuera el sistema se metastabiliza.

$$\textcircled{3} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$\textcircled{4}$

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - \alpha & -1 \\ 0 & \lambda - \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha \\ \lambda_2 &= \beta \end{aligned} \quad \alpha \neq \beta \Rightarrow$$

Eigenvektoren

$$\lambda_1 = \alpha \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \alpha - \beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\lambda_2 = \beta \quad \begin{bmatrix} 1 - \alpha & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\beta - \alpha)x - y = 0 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta - \alpha \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \beta - \alpha \end{bmatrix} \checkmark \quad T^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{bmatrix} \beta - \alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$A = T \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} T^{-1}$$

$$\phi = e^{At} = T e^{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} t} T^{-1} =$$

$$= T \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\beta t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \beta - \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\beta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta - \alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\beta - \alpha} \checkmark$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & e^{\beta t} \\ 0 & (\beta - \alpha) e^{\beta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta - \alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\beta - \alpha}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} (\beta - \alpha) e^{\alpha t} & -e^{\alpha t} + e^{\beta t} \\ 0 & (\beta - \alpha) e^{\beta t} \end{bmatrix} \frac{1}{\beta - \alpha} \checkmark$$

maso seria la de aproximar al sistema por un sistema
de orden 2 y a las 13 polos restantes de cada
de tal forma que su parte real este ^{entre} ~~entre~~ ^{entre} ~~entre~~ ^{entre}
menor y ^{entre} ~~entre~~ ^{entre} ~~entre~~ ^{entre} veces de la parte real de los polos dominan-
tes. ✓

⑤

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t)$$

$$u(t) = - \underbrace{[3 \ 1 \ 2]}_L \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = -L x(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) - b L x(t) & b &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (A - bL) x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A - bL) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= A - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Autowerte

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ -3 & \lambda & -3 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1) \lambda (\lambda + 1) - 2(\lambda + 1) =$$

$$= (\lambda + 1) [(\lambda - 1)\lambda - 2] = (\lambda + 1) [\lambda^2 - \lambda - 2] \checkmark$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} \checkmark$$

Autowerte
entw. 0, 1,
reell oder id.

Los autovalores después de incluir la realimentación

son los autovalores de $A - bL$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1)$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -1 \end{matrix} \quad \checkmark$$

⑥ Se va a poder seleccionar ^{cualquier} valor deseado por los autovalores si el sistema es controlable:

$$W_c = [b \quad Ab \quad A^2b]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Ab = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2b = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(W_c) = 0 \Rightarrow \text{No es controlable}$$

No puedo
dar cualquier valor
a los autovalores

X { Por tanto, como
elegir que no se
pueda condicionar
a $\operatorname{Re}(\lambda_i) < -2$

Se puede!